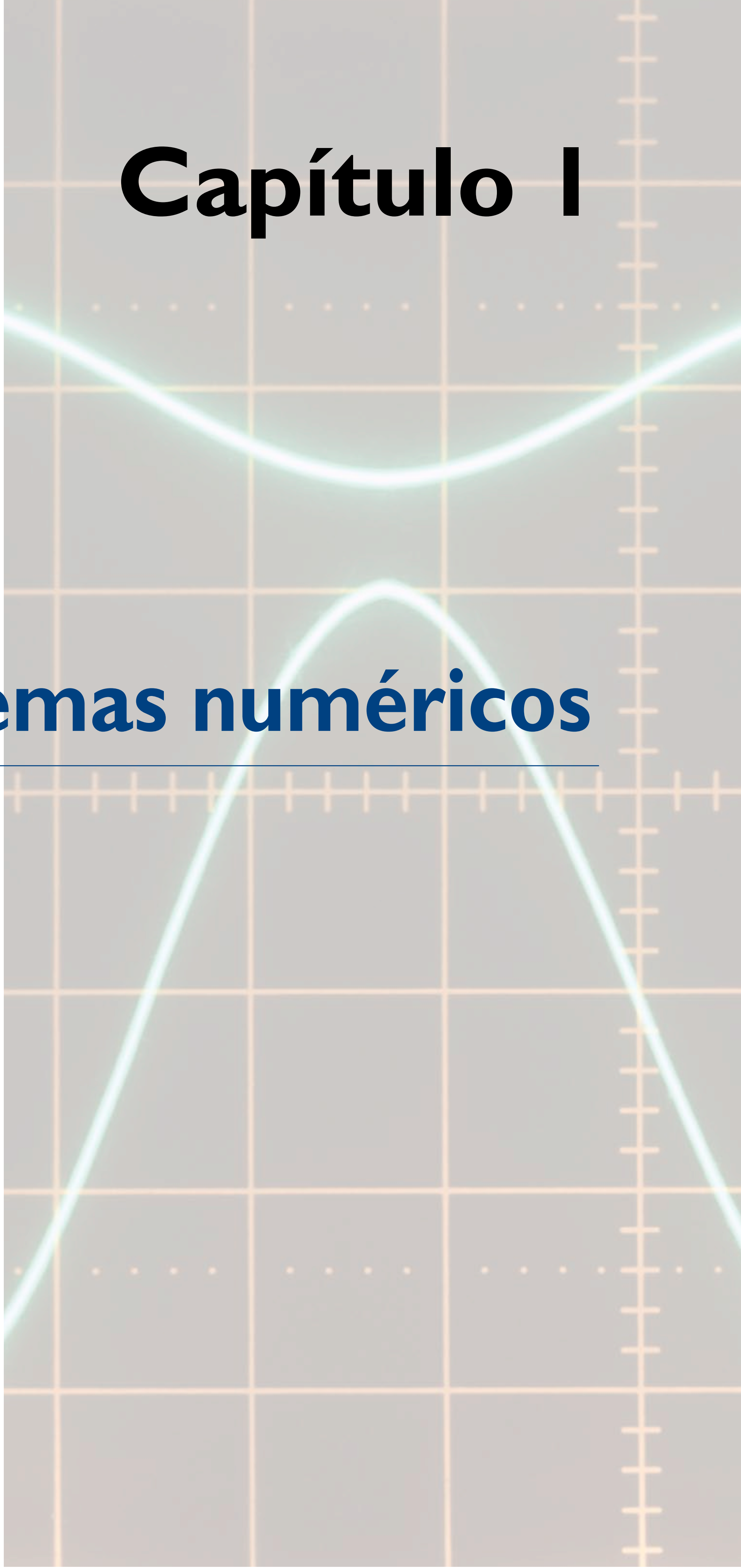
Capítulo 1



Sistemas numéricos

Os sistemas numéricos são usados para representar a quantidade de determinados elementos. O mais utilizado atualmente pela maioria das pessoas é chamado decimal. Esse nome foi adotado porque a base empregada é composta por dez algarismos, com os quais é possível formar qualquer número por meio da lei da formação.

Existem outros sistemas métricos que são utilizados em áreas técnicas, como eletrônica digital e programação de computadores. Nas próximas seções serão detalhadas as bases mais usadas nessas duas áreas: decimal, hexadecimal, octal e binária. Também veremos os métodos empregados para conversão de números entre essas bases.

1.1 Sistema numérico decimal

Os sistemas de numeração surgiram da necessidade de representar por meio de símbolos as contagens e associações de quantidades que as pessoas realizavam. Os egípcios, os babilônios, os chineses, os maias, os romanos e vários outros povos criaram sistemas de numeração próprios. O que utilizamos é o indo-arábico.

No sistema numérico decimal, os símbolos são representados por dez algarismos, que são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Para compor um número, associamos um ou mais algarismos e, dependendo da posição deles, obtemos números com valores diferentes.

A posição que o algarismo ocupa no número determina quantas são as unidades, as dezenas e as centenas desse número. Observe na figura 1.1 a representação do número 5738.

Figura 1.1
Exemplo do número 5 738 no sistema numérico decimal.

pesos dos algarismos do número 5738

5 7 3 8				
unidades	$\rightarrow 8 \cdot 10^0 =$	8	$\rightarrow$	8 tem peso 1
dezenas	$\rightarrow 3 \cdot 10^1 =$	30	$\rightarrow$	3 tem peso 10
centenas	$\rightarrow 7 \cdot 10^2 =$	700	$\rightarrow$	7 tem peso 10^2
milhares	$\rightarrow 5 \cdot 10^3 =$	5000	$\rightarrow$	5 tem peso 10^3
		5738		

potências de base 10

Nesse sistema, os números são representados de dez em dez; uma dezena é igual a 10 unidades, uma centena é igual a 100 unidades e um milhar é igual a 1 000 unidades. Em função dessa representação, dizemos que o sistema decimal é um sistema de **base 10**.

Exemplos

1. Nos números decimais a seguir, quais os valores dos pesos dos algarismos 3, 4 e 5?

a) 30 469
b) 179 531

Solução:

a) $30\,469 = 9 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^1 + \underline{4 \cdot 10^2} + 0 \cdot 10^3 + \underline{3 \cdot 10^4}$

3 tem peso ($10^4 = 10\,000$)
4 tem peso ($10^2 = 100$)

b) $179\,531 = 1 \cdot 10^0 + \underline{3 \cdot 10^1} + \underline{5 \cdot 10^2} + 9 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^5$

5 tem peso ($10^2 = 100$)
3 tem peso 10

2. Qual algarismo no número decimal 54 781 tem peso 1 000?

Solução:

$54\,781 = 1 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^2 + \underline{4 \cdot 10^3} + 5 \cdot 10^4$

O algarismo 4 tem peso 1000.

1.2 Sistema numérico hexadecimal

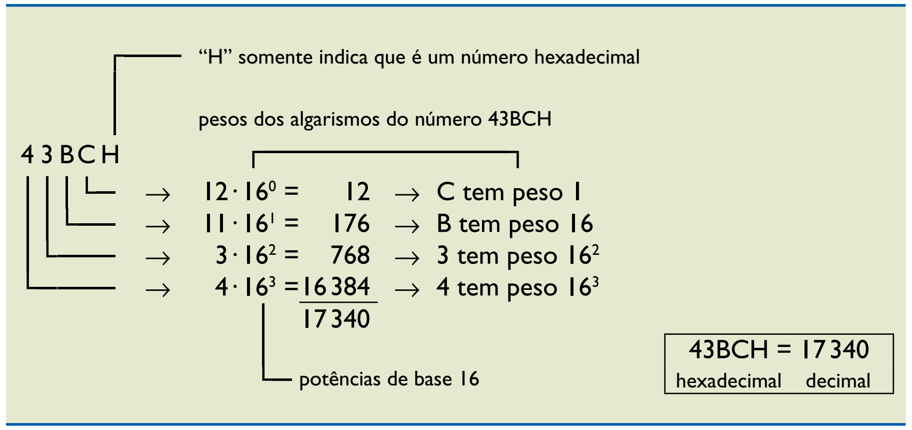
O sistema numérico hexadecimal possui 16 símbolos, representados por 16 algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E e F.

É possível fazer correspondência entre os algarismos do sistema hexadecimal e os algarismos do sistema decimal:

Algarismos hexadecimais	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Algarismos decimais	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Para representarmos um número hexadecimal no sistema decimal, devemos proceder como mostra a figura 1.2.

Figura 1.2
43BCH no sistema numérico hexadecimal equivale ao número 17 340 no sistema decimal.



Dizemos que o sistema hexadecimal é um sistema de **base 16**.

Exemplos

1. Nos números hexadecimais a seguir, quais os valores dos pesos dos algarismos 2, B e C?

a) 32CH
b) B3CH

Solução:

a) $32CH = \underline{12 \cdot 16^0} + \underline{2 \cdot 16^1} + 3 \cdot 16^2$

2 tem peso 16
C tem peso ($16^0 = 1$)

b) $B3CH = \underline{12 \cdot 16^0} + 3 \cdot 16^1 + \underline{B \cdot 16^2}$

B tem peso ($16^2 = 256$)
C tem peso 1

2. Encontre o equivalente decimal dos números hexadecimais a seguir usando os pesos de cada algarismo.

a) A2CH
b) 52H

Solução:

a) $A2CH = 12 \cdot 16^0 + 2 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^2 = 12 + 32 + 2\,560 = 2\,604 \rightarrow A2CH = (2\,604)_{10} = 2\,604$

b) $52H = 2 \cdot 16^0 + 5 \cdot 16^1 = 2 + 80 = 82 \rightarrow 52H = (82)_{10} = 82$

O número decimal pode ser representado sem parênteses e sem índice.

1.3 Sistema numérico octal

O sistema numérico octal possui oito algarismos, representados pelos símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

É possível fazer correspondência entre os algarismos do sistema octal e os algarismos do sistema decimal:

Algarismos octais	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
	↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
Algarismos decimais	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Para representarmos um número octal no sistema decimal, devemos proceder como mostra a figura 1.3.

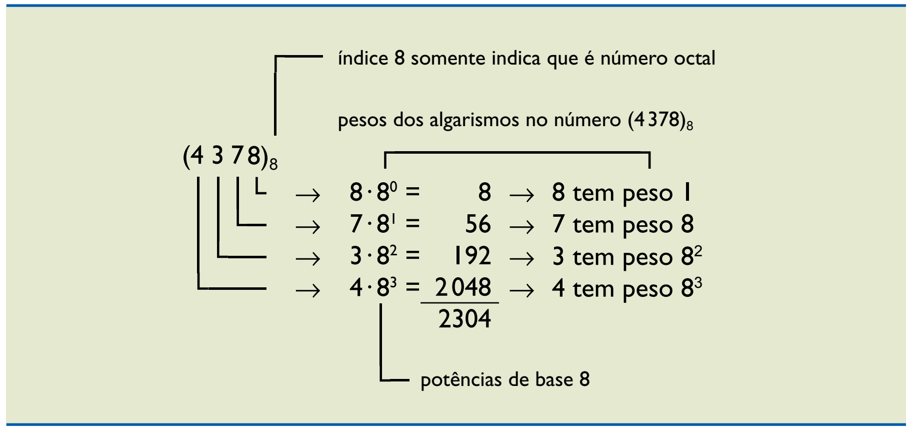


Figura 1.3
Representação do número $(4\,378)_8$ no sistema numérico octal. Esse número equivale ao 2 304 no sistema decimal.

Dizemos que o sistema octal é um sistema de **base 8**.

Exemplos

1. Nos números octais a seguir, quais os valores dos pesos dos algarismos 2 e 7?

a) $(327)_8$
b) $(271)_8$

Solução:

a) $(327)_8 = \underline{7 \cdot 8^0} + \underline{2 \cdot 8^1} + 3 \cdot 8^2$

2 tem peso 8
7 tem peso ($8^0 = 1$)

b) $(271)_8 = \underline{1 \cdot 8^0} + 7 \cdot 8^1 + \underline{2 \cdot 8^2}$

2 tem peso ($8^2 = 64$)
7 tem peso 8

2. Encontre o equivalente decimal dos números octais a seguir usando os pesos de cada algarismo.

a) $(34)_8$
b) $(206)_8$

Solução:

a) $(34)_8 = 4 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^1 = 4 + 24 = 28$

b) $(206)_8 = 6 \cdot 8^0 + 0 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^2 = 6 + 0 + 128 = 134$

1.4 Sistema numérico binário

O sistema de numeração binário possui dois símbolos, representados pelos algarismos: 0 e 1.

É possível fazer correspondência entre os algarismos do sistema binário e os algarismos do sistema decimal:

Algarismos binários 0, 1
↓ ↓
Algarismos decimais 0, 1

Para representar um número binário no sistema decimal, devemos proceder como mostra a figura 1.4.

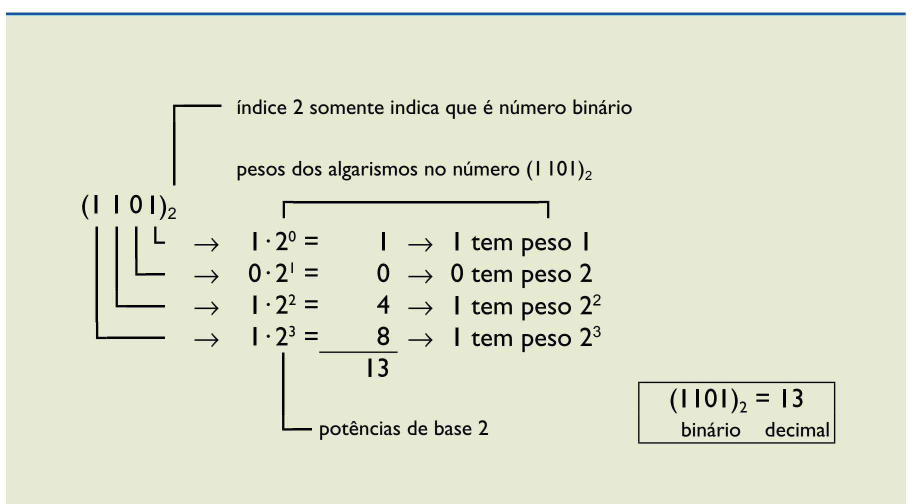


Figura 1.4
Representação do número $(1101)_2$ no sistema numérico binário. Esse número equivale ao 13 no sistema decimal.

Dizemos que o sistema binário é um sistema de **base 2**.

Nesse sistema de numeração, os algarismos podem ser chamados de dígitos. Cada dígito em um sistema binário é denominado bit (***b****inary dig****it***). Os números binários são representados em grupos de quatro dígitos, completando-se com zero(s) à esquerda, se necessário.

Na representação dos números binários (figura 1.5), o primeiro dígito à direita é chamado dígito menos significativo (LSB, ***l****east* ***s****ignificant* ***b****it*), e o primeiro dígito à esquerda diferente de zero, dígito mais significativo (MSB, ***m****ost* ***s****ignificant* ***b****it*).

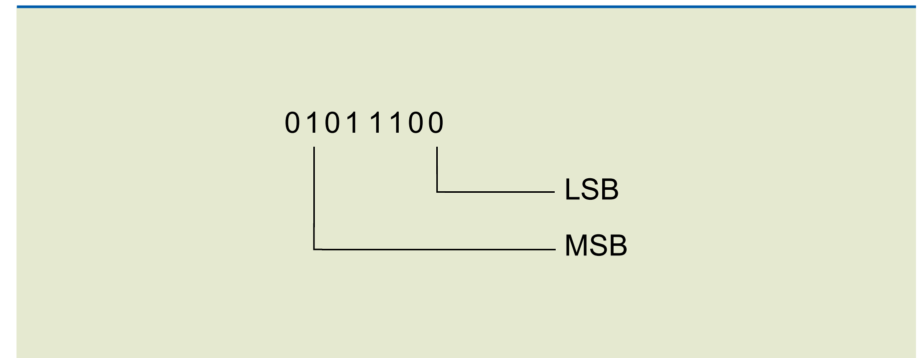


Figura 1.5
Representação do número 0101 1100 no sistema numérico binário.

O sistema binário é utilizado principalmente na eletrônica digital, na computação, nas telecomunicações, na robótica, na automação etc., ou seja, nas áreas que usam circuitos digitais, que, por sua vez, têm como entradas e saídas somente valores "0" e "1".

Exemplos

1. Nos números binários a seguir, qual o valor do peso (em decimal) dos algarismos assinalados?

a) $0\,0\,\underline{1}\,1\;0\,1\,\underline{1}\,1$ b) $1\,\underline{1}\,1\,1\;1\,\underline{1}\,0\,1$

Solução:

a) $0\,0\,\underline{1}\,1\;0\,1\,\underline{1}\,1$

tem peso 2
tem peso ($2^5 = 32$)

b) $1\,\underline{1}\,1\,1\;1\,\underline{1}\,0\,1$

tem peso ($2^2 = 4$)
tem peso ($2^6 = 64$)

2. Encontre o equivalente decimal dos números binários a seguir usando os pesos de cada algarismo.

a) 1011 0110

b) 0100 0010

Solução:

a) $1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0 = 2^1 + 2^2 + 2^4 + 2^5 + 2^7 = 2 + 4 + 16 + 32 + 128 = 182$

b) $0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0 = 2^1 + 2^6 = 2 + 64 = 66$

3. Responda.

a) George Boole nasceu no século XIX em uma década cuja dígito LSB é 5. Estabeleça, com base nessa informação, qual é o menor intervalo de tempo em que ele nasceu. Observe que foi omitido na informação o MSB da década.

Solução:

Século XIX → 1801 a 1900. Como não podemos estabelecer a década, o menor intervalo de tempo em que com certeza ele nasceu é de 01/01/1801 a 31/12/1900. Portanto, pela informação dada, concluímos que o menor intervalo é de 100 anos.

b) O primeiro computador digital eletrônico de grande escala (ENIAC) foi apresentado no século passado na década de 1940. Estabeleça, com base nessa informação, o menor período de tempo em que com certeza, surgiu o ENIAC. Observe que foi omitido na informação o LSB da década.

Solução:

Pela informação dada, o ENIAC surgiu entre 01/01/1940 e 31/12/1949. Portanto, podemos garantir um intervalo mínimo de 10 anos. Como o enunciado da questão forneceu o MSB da década, foi possível estabelecer um intervalo de tempo mais preciso.

1.5 Conversão de sistemas numéricos (em números inteiros positivos)

1.5.1 Conversão de binário em decimal

Para convertermos número binário em decimal, somamos os pesos somente para os bits de valor "1", obtendo, assim, o equivalente decimal.

Exemplos

1. Converta $(1010)_2$ em decimal.

Solução:

1 0 1 0

2^3 2 → $(8 + 2) = 10$, portanto $(1010)_2 = 10$

2. Converta $(10111001)_2$ em decimal.

Solução:

1 0 1 1 1 0 0 1

2^7 2^5 2^4 2^3 2^0 → $(128 + 32 + 16 + 8 + 1) = 185$

$\boxed{(10111001)_2 = 185}$

1.5.2 Conversão de decimal em binário

Para convertermos número decimal em binário, **agrupamos os restos** das divisões sucessivas do número por 2, até que a última divisão tenha quociente igual a zero.

Exemplo

Converta o decimal 56 em binário.

Solução:

Observe como foram agrupados os bits da coluna correspondente aos restos das divisões, para formar o binário equivalente. Depois de determinar os restos das divisões, eles são ajustados para representar dois grupos de quatro bits.

56	2					
16	28	2				
0	08	14	2			
LSB	0	0	7	2		
			1	3	2	
				1	1	2
					1	0
					MSB	

1 1 1 0 0 0 → $\boxed{56 = (111000)_2}$

1.5.3 Conversão de hexadecimal em decimal

Para convertermos número hexadecimal em decimal, somamos os pesos multiplicados pelos números correspondentes em decimal, obtendo, assim, o equivalente decimal.

Exemplo

Converta (A8E6H) em decimal.

Solução:

$$\begin{aligned} \text{A8E6H} &= 10 \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16 + 6 \cdot 16^0 = \\ &= 40\,960 + 2\,048 + 224 + 6 = 43\,238 \\ &\boxed{\text{A8E6H} = 43\,238} \end{aligned}$$

1.5.4 Conversão de decimal em hexadecimal

O processo é semelhante ao da conversão de decimal em binário.

Exemplo

Converta (2 470) em hexadecimal.

Solução:

2470	16		
87	154	16	
70	10	9	16
6		9	0
LSB		MSB	

9 A 6 → $\boxed{2\,470 = \text{9A6H}}$

Observe que 6, 10 e 9 são os restos das divisões; 10 foi substituído por seu equivalente hexadecimal A.

1.5.5 Conversão de octal em decimal

Exemplo

Converta $(2075)_8$ em decimal.

Solução:

$$\begin{aligned} (2075)_8 &= 2 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 \\ &= 1\,024 + 56 + 5 = 1\,085 \\ &\boxed{(2075)_8 = 1\,085} \end{aligned}$$

1.5.6 Conversão de decimal em octal

O processo é semelhante ao da conversão de decimal em binário.

Exemplo

Converta (1 085) em octal.

Solução:

1 085	8			
28	135	8		
45	55	16	8	
5	7	0	2	8
LSB			2	0
			MSB	

2 0 7 5 → $\boxed{1085 = (2075)_8}$

1.5.7 Conversão de octal em binário

Para convertermos número octal em binário, convertemos dígito a dígito de octal em binário, da direita para a esquerda, em grupos de três bits. O último grupo completamos com zero(s) à esquerda, se necessário.

Exemplo

Converta $(32075)_8$ em binário.

Solução:

3	2	0	7	5
↓	↓	↓	↓	↓
011	010	000	111	101

$$\boxed{(32075)_8 = (0011\ 0100\ 0011\ 1101)_2}$$

Após a conversão, fazemos a representação usual em grupos de quatro bits, completando com zeros à esquerda.

Agora, calcule o equivalente decimal de $(32075)_8$ e o equivalente decimal de $(0011\ 0100\ 0011\ 1101)_2$. Compare esses valores.

1.5.8 Conversão de binário em octal

Para convertermos número binário em octal, separamos o número binário em grupos de três bits, da direita para a esquerda, completando o último grupo com zero(s), se necessário. Convertemos em octal cada grupo. Lembre-se de que de 0 a 7 os valores octais e decimais são representados pelos mesmos dígitos.

Exemplo

Converta $(1011\ 0010)_2$ em octal.

Solução:

010	110	010
↓	↓	↓
2	6	2

$\boxed{(10110010)_2 = (262)_8}$

1.5.9 Conversão de hexadecimal em binário

Para convertermos número hexadecimal em binário, fazemos a conversão dígito a dígito de hexadecimal em binário, da direita para a esquerda, em grupos de quatro bits. O último grupo à esquerda completamos com zero(s), se necessário.

Exemplo

Converta (1ADH) em binário.

Solução:

1	A	D
↓	↓	↓
0001	1010	1101

$\boxed{1ADH = (0001\,1010\,1101)_2}$

1.5.10 Conversão de binário em hexadecimal

Para convertermos número binário em hexadecimal, separamos o número binário em grupos de quatro bits, da direita para a esquerda, completando o último grupo com zero(s), se necessário. Convertemos em hexadecimal cada grupo.

Exemplo

Converta $(0001\ 1010\ 1101)_2$ em hexadecimal.

Solução:

0001	1010	1101
↓	↓	↓
1	A	D

$\boxed{(0001\ 1010\ 1101)_2 = 1ADH}$

1.5.11 Conversão de octal em hexadecimal

Para convertermos número octal em hexadecimal, realizamos duas etapas:

octal → binário → hexadecimal

1.5.12 Conversão de hexadecimal em octal

Para convertermos número hexadecimal em octal, realizamos duas etapas:

hexadecimal → binário → octal

1.5.13 Resumo de conversão de sistemas

- Na conversão de qualquer outro sistema em decimal, usamos o peso do dígito.
- Na conversão de decimal em qualquer outro sistema, efetuamos divisões sucessivas.

A figura 1.6 apresenta o resumo de conversão. Não se preocupe em decorá-la pois ela poderá ser consultada sempre que necessário. Entretanto, a associação dos lembretes escritos com o processo de conversão deve estar bem clara.

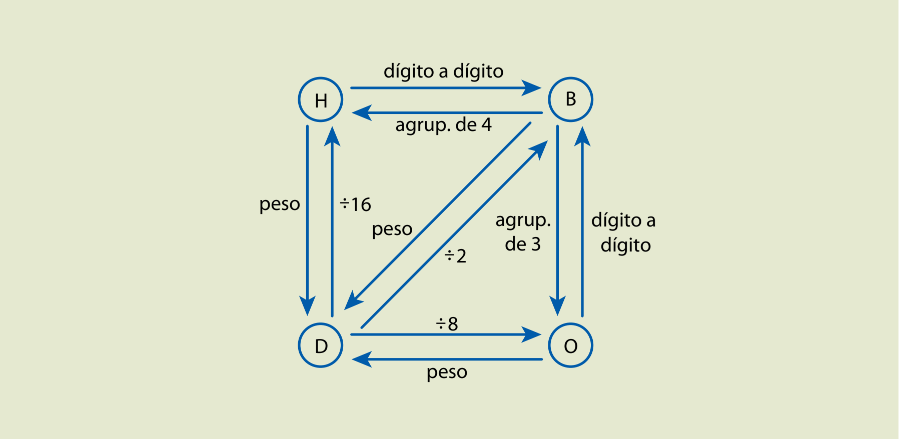


Figura 1.6
Resumo de conversão de sistemas.

A tabela 1.1 também não precisa ser memorizada. Sua construção pode ser feita rapidamente observando na coluna dos valores binários o avanço dos números "1" da direita para a esquerda, ao passar de uma linha para a seguinte. Tente reproduzir a tabela sem consultá-la pois isto é importante.

Tabela 1.1
Resumo das equivalências entre os números binários, decimais e hexadecimais (de 0 a 15 em decimal).

B				D	H
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	2	2
0	0	1	1	3	3
0	1	0	0	4	4
0	1	0	1	5	5
0	1	1	0	6	6
0	1	1	1	7	7
1	0	0	0	8	8
1	0	0	1	9	9
1	0	1	0	10	A
1	0	1	1	11	B
1	1	0	0	12	C
1	1	0	1	13	D
1	1	1	0	14	E
1	1	1	1	15	F

Os exercícios a seguir são exemplos de conversão de números positivos não inteiros, apresentados como complemento, uma vez que estão além dos objetivos deste livro.

Exemplos

1. Converta $(1011{,}1001)_2$ em decimal.

Solução:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 1 & 1, & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 2^3 & & 2^1 & 2^0 & 2^{-1} & & & 2^{-4} & \rightarrow (8 + 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}0625) = 11{,}5625 \end{array}$$

$$\boxed{(1011{,}1001)_2 = 11{,}5625}$$

2. Converta o decimal (0,296875) em binário.

Solução:

$$0{,}296875 \cdot 2 = 0 + 0{,}59375$$
$$0{,}59375 \cdot 2 = 1 + 0{,}1875$$
$$0{,}1875 \cdot 2 = 0 + 0{,}375$$
$$0{,}375 \cdot 2 = 0 + 0{,}75$$
$$0{,}75 \cdot 2 = 1 + 0{,}5$$
$$0{,}5 \cdot 2 = 1 + 0 \qquad \boxed{0{,}296875 = (0{,}0\,1\,0\,0\,1\,100)_2}$$

$$\begin{aligned} 2^{-2} &= 0{,}250000 \\ 2^{-5} &= 0{,}031250\ + \\ 2^{-6} &= \underline{0{,}015625} \\ &= 0{,}296875 \end{aligned}$$

pesos dos bits com valor "1"

Observe que o lado direito da igualdade é a decomposição do resultado em parte inteira e parte fracionária. O processo deve cessar quando a parte fracionária da decomposição do número for zero ou quando a aproximação obtida for suficiente. O agrupamento de quatro bits é ajustado com o acréscimo de zero(s) **à direita**.

3. Converta (A8E6,39H) em decimal.

Solução:

$$\text{A8E6,38H} = 10 \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16 + 6 \cdot 16^0 + 3 \cdot 16^{-1} + 8 \cdot 16^{-2}$$
$$= 40\,960 + 2048 + 224 + 6 + 0{,}1875 + 0{,}03125 = 43\,238{,}21875$$

$$\boxed{\text{A8E6,38H} = 43238{,}21875}$$